Domácí úkol ze cvičení 10:

1. Definujme rekurentně posloupnost $\{a_n\}$, kde

   (i) $a_1 = 10$, $a_{n+1} = 6 - \dfrac{5}{a_n}$, $n = 1,2,\dots$.

   (ii) $a_1 = \sqrt{2}$, $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$, $n = 1,2,\dots$.

   (iii) (trošku těžší) $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \dfrac{1}{1 + a_n}$, $n = 1,2,\dots$.

   Rozhodněte (aspoň u jedné z daných posloupností), zda existuje $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, a pokud ano, spočítejte ji.

2. Konvergence řad s nezápornými členy:

   (i) Rozhodněte o konvergenci , resp. divergenci, řady (užijte vhodné kriterium) :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1}}{n} \; ; \; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2 - 4n + 5} \; ; \; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{4^n} \; ; \; \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{3n+1}\right)^n \; ; \; \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n \; ; \; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$$

   (ii) Vyšetřete konvergenci řady v závislosti na parametru $a > 0$:

   a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n-2}}{n^a}$; b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{1 + a^n}$.